Topologia
Lista 1

Zad 1. Pokazać, że dla dowolnej rodziny podzbiorów $\mathcal{R}$ zbioru X istnieje najmniejsza topologia $\tau(\mathcal{R})$ na X zawierająca $\mathcal{R}$. Co więcej, jeżeli $\bigcup_{A\in\mathcal{R}} A = X$, to $\tau(\mathcal{R})$ składa się z sum skończonych przekrojów elementów rodziny $\mathcal{R}$.

Zad 2. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Pokazać, rodzina kul otwartych $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$, $x \in X$, $r > 0$, tworzy bazę topologiczną. Uzasadnić, że zbiór $U \subseteq X$ jest otwarty w przestrzeni metrycznej (X,d) wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą kul otwartych.

Zad 3. Sprawdzić, czy rodzina $\mathcal{R} = \{[a,b),(a,b] : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ jest bazą pewnej topologii na $\mathbb{R}$.

Zad 4. Pokazać, że rodziny $\mathcal{B}_\ell = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B}_u = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$ są bazami pewnych topologii na $\mathbb{R}$, które oznaczać będziemy odpowiednio przez τ_ℓ i τ_u.

a) Pokazać, że topologie τ_ℓ, τ_u są nieporównywalne, ale obie są bogatsze od topologi euklidesowej.

b) Pokazać, że $\tau_\ell \cap \tau_u$ jest topologią euklidesową na $\mathbb{R}$

c) Opisać topologię generowaną przez $\tau_\ell \cup \tau_u$.

Zad 5. Czy istnieje baza przeliczalna wprowadzająca na $\mathbb{R}$ topologie euklidesową?

Zad 6. Naszkicować na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ kule otwarte $B\big((0,0),1\big)$ dla następujących metryk:

$$d_e(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \qquad (\textit{metryka euklidesowa}),$$

$$d_t(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \qquad (\textit{metryka taksówkowa}),$$

$$d_m(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \qquad (\textit{metryka maximum}),$$

gdzie $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$. Pokazać, że metryki te wprowadzają na $\mathbb{R}^2$ tą samą rodzinę zbiorów otwartych.

Zad 7. Niech (X,τ) będzie przestrzenią topologiczną i niech YX. Pokazać, że $\tau_Y := \{U \cap Y : U \in \tau\}$ jest topologią na Y.

Zad 8. Niech (X,τ) będzie przestrzenią topologiczną z bazą $\mathcal{B}$ i niech YX. Pokazać, że $\mathcal{B}_Y : \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ jest bazą topologii podprzestrzeni (Y,τ_Y).

Zad 9. Niech (X,τ_X) i (Y,τ_Y) będą przestrzeniami topologicznymi z bazami topologicznymi $\mathcal{B}_X$ i $\mathcal{B}_Y$, odpowiednio. Pokazać, że $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ jest bazą topologiczną na $X \times Y$ i że zadana przez nią topologia zależy jedynie od τ_X i τ_Y. Topologię tę nazywamy topologią produktową.

Zad 10. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą topologi na $\mathbb{R}$ składająca sie z przedziałów (a,b), $a < b$. Pokazać, że $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ jest bazą topologii na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$.